Seri bahan kuliah Algeo #19

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

(Bagian 2)

Versi update 2022

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika

STEI-ITB

Sumber:

Howard Anton & Chris Rores, *Elementary Linear Algebra, 10th Edition*

Nilai Eigen dan Matriks Balikan

- **Teorema**: Sebuah matriks persegi A berukuran n x n memiliki balikan (*invers*) jika dan hanya jika $\lambda = 0$ bukan nilai eigen dari matriks A.

- Jika A memiliki balikan, maka $\det(A) \neq 0$.

Contoh 5. Dari contoh 2,matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ memiliki nilai eigen $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

Tidak ada nilai eigen yang nol, sehingga A memiliki balikan.

Dapat diperiksa bahwa det(A) = (3)(-1) – (8)(0) = -3 $\neq$ 0, sehingga A memiliki balikan, yaitu

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Contoh 6. Matriks A = $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ memliki nilai eigen λ= 12, λ = 10 dan λ = 0 (silakan diperiksa!). Karena terdapat nilai eigen λ = 0, maka matriks A tidak memiliki balikan. Dapat diperiksa bahwa det(A) = 0.

Pernyataan yang ekivalen

THEOREM 5.1.6 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A is invertible.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

(c) The reduced row echelon form of A is I_n.

(d) A is expressible as a product of elementary matrices.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix b.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix b.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) The column vectors of A are linearly independent.

(i) The row vectors of A are linearly independent.

(j) The column vectors of A span R^n.

(k) The row vectors of A span R^n.

(l) The column vectors of A form a basis for R^n.

(m) The row vectors of A form a basis for R^n.

(n) A has *rank* n.

(o) A has nullity 0.

(p) The orthogonal complement of the null space of A is R^n.

(q) The orthogonal complement of the row space of A is $\{\mathbf{0}\}$.

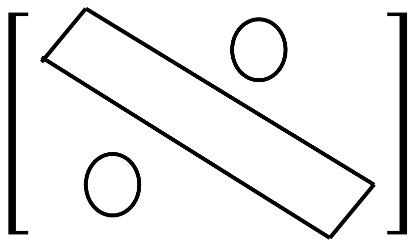
(r) The range of T_A is R^n.

(s) T_A is one-to-one.

(t) $\lambda = 0$ is not an eigenvalue of A.

Diagonalisasi

- Matriks diagonal adalah matriks yang semua elemen di atas dan di bawah diagonal utama adalah nol.



Contoh 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Definisi**. Sebuah matriks persegi A dikatakan dapat **didiagonalisasi** jika ia mirip dengan matriks diagonal, yaitu terdapat matriks P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Dalam hal ini dikatakan P mendiagonalisasi matriks A.

- P adalah matriks yang kolom-kolomnya adalah basis ruang eigen dari matriks A, yaitu:

$$P = (p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n)$$

Misalkan D adalah matriks diagonal, maka

$$A = PDP^{-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{D = P^{-1}AP}$$

- Matriks A memiliki kemiripan dengan D, salah satunya memiliki determinan yang sama, yaitu

$$
\begin{aligned}
D &= P^{-1}AP \\
\det(D) &= \det(P^{-1}AP) \\
&= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) \\
&= \det(A)
\end{aligned}
$$

- Beberapa sifat kemiripan lainnya pada A dan D adalah memiliki *rank*, *nullity*, *trace*, persamaan karakteristik, dan nilai-nilai eigen yang sama.

Table 1 Similarity Invariants

Property	Description
Determinant	A and $P^{-1}AP$ have the same determinant.
Invertibility	A is invertible if and only if $P^{-1}AP$ is invertible.
Rank	A and $P^{-1}AP$ have the same rank.
Nullity	A and $P^{-1}AP$ have the same nullity.
Trace	A and $P^{-1}AP$ have the same trace.
Characteristic polynomial	A and $P^{-1}AP$ have the same characteristic polynomial.
Eigenvalues	A and $P^{-1}AP$ have the same eigenvalues.
Eigenspace dimension	If λ is an eigenvalue of A and hence of $P^{-1}AP$, then the eigenspace of A corresponding to λ and the eigenspace of $P^{-1}AP$ corresponding to λ have the same dimension.

Contoh 7: Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A.

<u>Jawaban</u>:

Sudah dihitung ruang eigennya dari Latihan 2 (lihat materi Nilai Eigen dan Vektor Eigen bagian 1):

$$E(4) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \} \text{ dan } E(-2) = \{ \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \}$$

maka

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{(-1)-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa apakah P mendiagonalisasi A, maka hitunglah bahwa

$$D = P^{-1}AP$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Contoh 8: Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawaban:

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

Untuk $\lambda = 2 \rightarrow E(2) = \{ \mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r \text{ dan } s \in \mathbf{R} \}$

Untuk $\lambda = 1 \rightarrow E(1) = \{ \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \}$

Maka $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Untuk memastikan bahwa P mendiagonalisasi A, periksa bahwa

$D = P^{-1}AP$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

adalah matriks diagonal.

Contoh 9: Tentukan matriks P yang mendiagonalisasi A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Jawaban:

Persamaan karakteristik matriks A adalah

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

Untuk $\lambda = 1 \rightarrow$ E(1) = { $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R}$ }

Untuk $\lambda = 2 \rightarrow$ E(2) = { $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbf{R}$ }

Oleh karena A adalah matriks 3 x 3 sedangkan hanya ada dua vektor basis di dalam kedua ruang eigen, maka tidak terdapat matriks P sehingga A <u>tidak</u> dapat didiagonalisasi.

Kegunaan matriks diagonal: menghitung perpangkatan matriks.

Contoh: Berapakah A^3?

$$A^3 = (PDP^{-1})^3$$
$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})$$
$$= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$P^{-1}P = I$$
$$= PDIDIDP^{-1}$$
$$= PDDDP^{-1}$$
$$= PD^3P^{-1}$$

Menghitung D^3 sangat mudah, misalkan dari Contoh 7, matriks diagonal D yang mirip dengan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ sudah dihitung, yaitu D = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Maka,

$$D^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & (-2)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

maka

$$A^3 = PD^3P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 64 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 36 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$$

Latihan (dari soal kuis 2019)

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a). Tentukan semua nilai eigen dari matriks A

b). Tentukan semua vektor eigen dari A dan basis dari ruang eigen

c). Apakah A dapat didiagonalsasi? Jika YA, tentukan matriks diagonal dari A, lalu hitunglah A^5 dengan bantuan matriks diagonal tsb.

EXAMPLE 5 Power of a Matrix

Use 3 to find A^{13}, where

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Solution We showed in Example 1 that the matrix A is diagonalized by

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

and that

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Thus, it follows from 3 that

$$A^{13}=PD^{13}P^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{13} & 0 & 0\\ 0 & 2^{13} & 0\\ 0 & 0 & 1^{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-8190 & 0 & -16382\\ 8191 & 8192 & 8191\\ 8191 & 0 & 16383\end{bmatrix}$$

Aplikasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen di dalam *Analytic Hierarchy Process* (AHP)

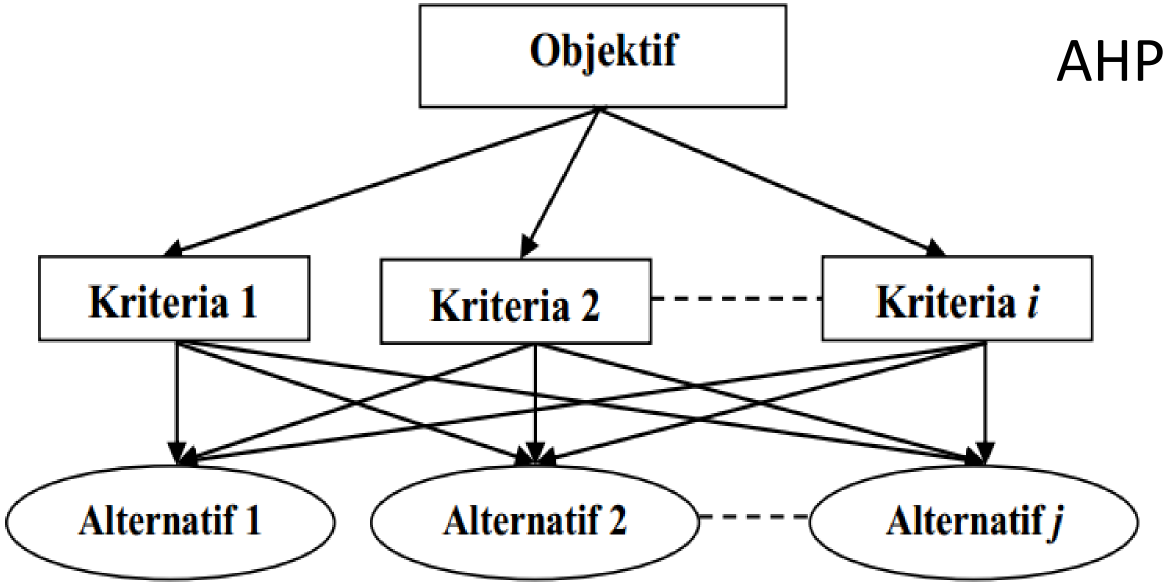
Bahan tambahan IF2123 Aljabar Geometri

Program Studi Informatika ITB

Sumber:

1. Unknown, *Analytic Hierarchy Process (What is AHP)*

- AHP: metode yang digunakan dalam analisis pengambilan keputusan.



AHP: metode untuk menurunkan skala rasio dari perbandingan antar kriteria

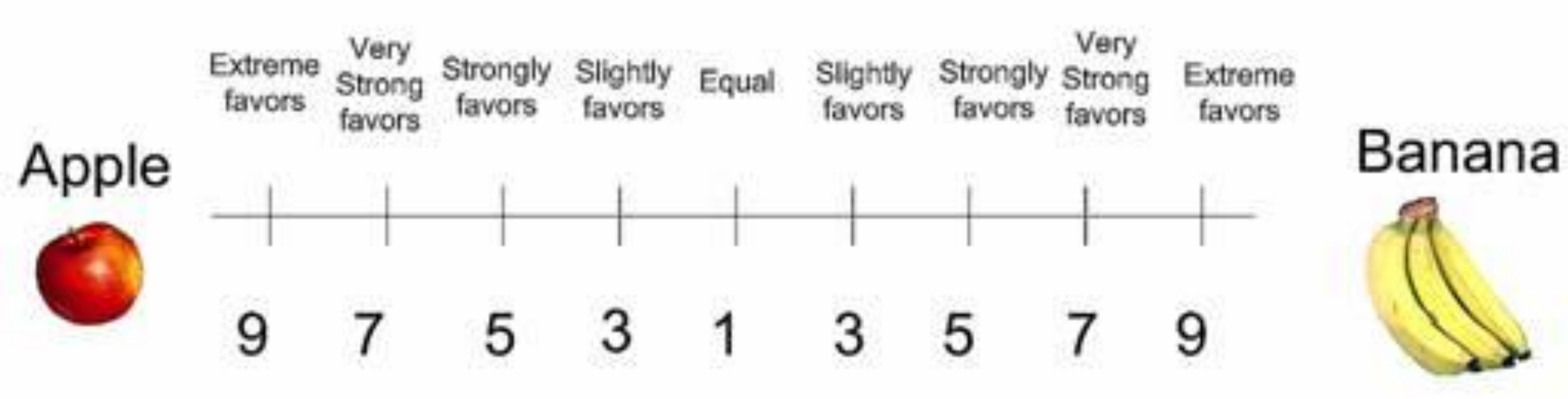
Skala rasio diturunkan dari prinsip vektor Eigen

Indeks kekonsistenan diturunkan dari prinsip nilai Eigen

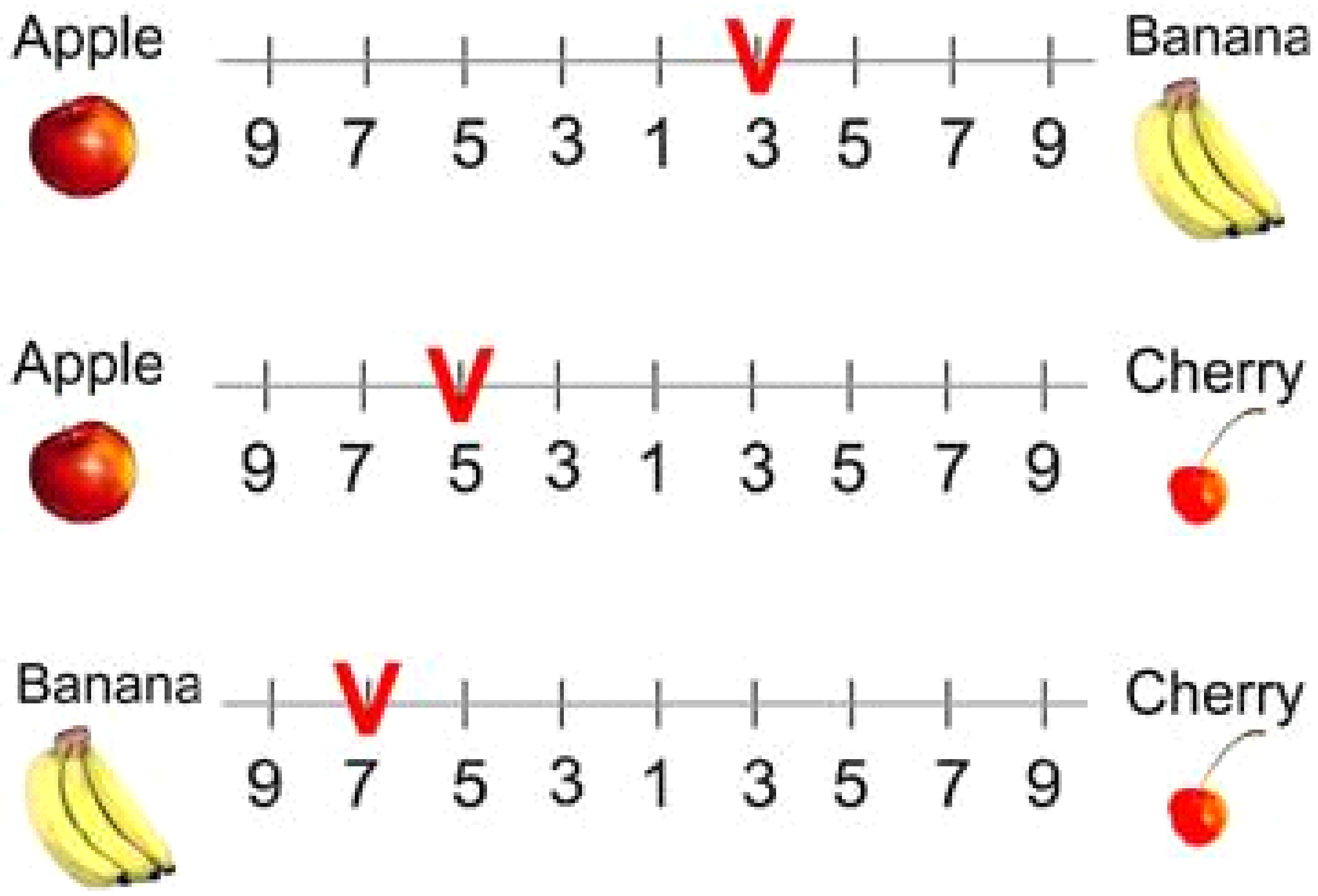
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

eigenvector *eigenvalue*

Contoh: Ada tiga buah yang akan dipilih oleh Joko untuk dibawa piknik: pisang, apel, cherry. Buah mana yang akan dipilih?



Tahap 1: *Pairwise comparison*



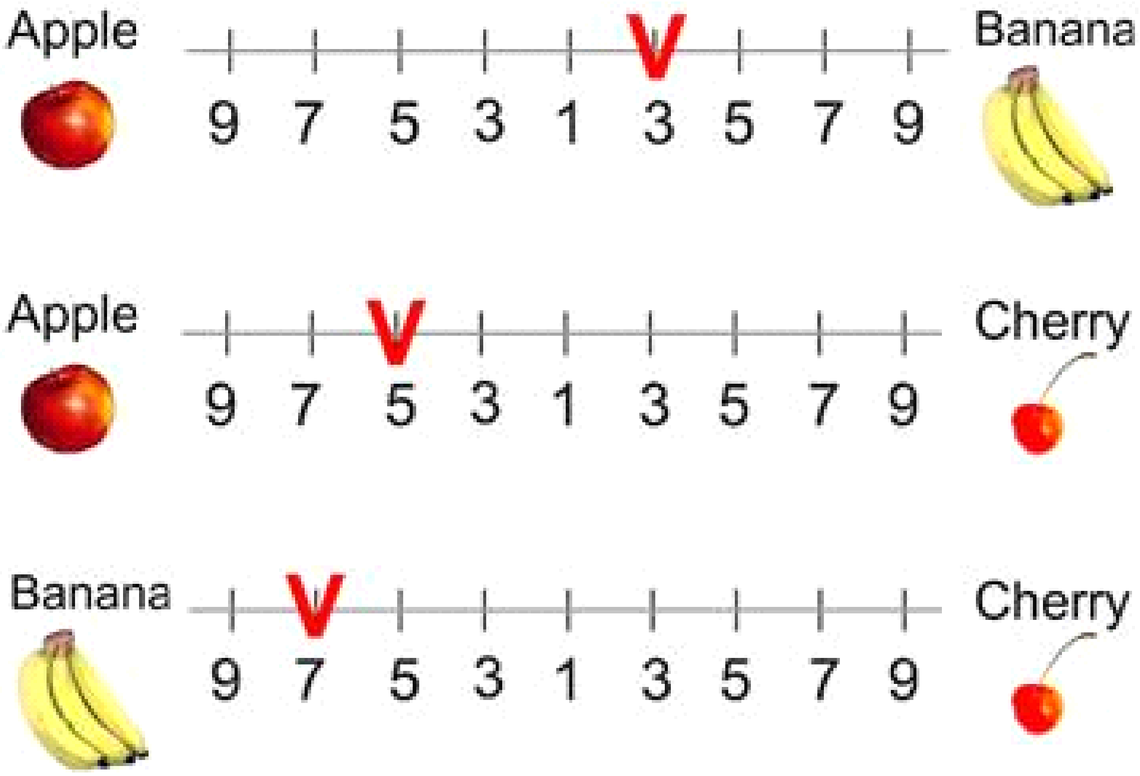
Catatan: Jika ada n pilihan, maka diperlukan sebanyak $n(n-1)/2$ perbandingan

Tahap 2: Pembentukan matriks perbandingan

Rule:

- Jika nilai yang diberikan terletak **di kiri** angka 1, maka kita meletakkan **nilai aktual** tersebut di dalam matriks.

- Jika nilai yang diberikan terletak **di kanan** angka 1, maka kita meletakkan **nilai kebalikannya** di dalam matriks.



Rule:
Jika nilai yang diberikan terletak **di kiri** angka 1, maka kita meletakkan **nilai aktual** tersebut di dalam matriks.

Jika nilai yang diberikan terletak **di kanan** angka 1, maka kita meletakkan **nilai kebalikannya** di dalam matriks.

$$A = \begin{array}{r} \\ apple \\ banana \\ cherry \end{array} \begin{array}{c} \text{apple banana cherry} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ & 1 & 7 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{r} \\ apple \\ banana \\ cherry \end{array} \begin{array}{c} \text{apple banana cherry} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tahap 3: Menentukan vektor prioritas (Menghitung nilai eigen dan vektor eigen)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = 0$$

Setelah dilakukan perhitungan, diperoleh:

1. Nilai eigen λ_{max} = 3.0649
2. Vektor eigen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.87828 \\ 9.02462 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2790 \\ 0.6491 \\ 0.0719 \end{bmatrix}^{*)}$ $\Rightarrow$ Appel = 27,9%, Banana = 64,9%, Cherry = 7,1%

*) Diperoleh dengan menormalisasi vektor eigen, yaitu membagi setiap komponen dengan nilai totalnya

Tahap 4: Menentukan Indeks Konsistensi dan Rasio Konsistensi

Indeks konsistensi: $$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.0967-3}{2} = 0.0484$$

Table 1 Random Consistency Index (RI)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Rasio konsistensi: $$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.0484}{0.58} = 0.083 = 8{,}3\%$$ (acceptable)

Jika CR $\leq$ 10%, maka inkonsistensi dapat diterima. Jika CR > 10%, maka kita perlu merevisi penilaian subyektif (*pairwise comparison*)

TAMAT